CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1984

•

CONCOURS SCIENCES

MATHEMATIQUES I

Durée : 4 heures

Jeudi 3 mai 1984 de 8 heures à 12 heures

•

– I –

1) On considère l'équation différentielle :

$$2xy' + y = y^3(1 - x^2) \ . \qquad (1)$$

où y est la fonction inconnue, à valeurs réelles, de la variable réelle x . Intégrer cette équation. On pourra poser

$$z = \frac{1}{y^2} \ .$$

2) Le plan est le plan euclidien, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox, Oy . Etudier et représenter sur un même graphique :

a) L'ensemble (C_1) des points des courbes intégrales de (1) où la tangente est parallèle à l'axe Ox .

b) L'ensemble (C_2) des points des courbes intégrales de (1) où la tangente passe par O .

3) Etudier les variations des solutions de l'équation (1); discuter. Représenter, sur le graphique précédent, une courbe intégrale de (1) de chaque type. Discuter la position de ces courbes par rapport à (C_1) .

4) a désignant un paramètre réel, on considère la famille de courbes (Γ_a) d'équation :

$$y_a(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2ax + 1}} \ .$$

Calculer les coordonnées du centre de courbure I_a de (Γ_a) au point A de coordonnées $(0, 1)$, en fonction de a . Représenter soigneusement l'ensemble des points I_a, quand a varie. On précisera les asymptotes et l'on placera la courbe par rapport à celles-ci.

– II –

1) Montrer que la fonction y_a vérifie l'équation différentielle linéaire :

$$(x^2 - 2ax + 1)y_a' + (x - a)y_a = 0 \quad . \qquad (2)$$

2) On suppose que y_a admet un développement en série entière au voisinage de 0 :

$$y_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(a)\, x^n \quad . \qquad (3)$$

a) Donner une relation de récurrence entre $L_n(a)$; $L_{n-1}(a)$; $L_{n-2}(a)$.

b) Calculer $L_0(a)$; $L_1(a)$; $L_2(a)$.

c) Montrer que $L_n(a)$ est un polynôme de la variable a , dont on précisera la parité et le terme de plus haut degré. Calculer $L_n(1)$.

3) Dans le cas où $0 \leqslant a \leqslant 1$, montrer que $|L_n(a)| \leqslant 3^n$. En déduire un domaine de validité du développement (3) de y_a en série entière.

4) Dans le cas où : $a \geqslant 1$, montrer que la suite $L_n(a)$ est croissante et positive. Trouver une quantité $\lambda(a)$ telle que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\quad L_n(a) \leqslant [\lambda(a)]^n \quad .$$

En déduire un domaine de validité du développement (3) de y_a en série entière.

5) Montrer que le polynôme $L_n(a)$, $n \in \mathbb{N}^*$, a toutes ses racines réelles et distinctes, situées dans l'intervalle $]-1, 1[$ et séparées par les racines de $L_{n-1}(a)$.

– III –

On suppose, dans cette partie, que a est supérieur ou égal à 1.

1) Pour quelles valeurs des réels α et β l'intégrale :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\alpha + \beta \cos \varphi}$$

a-t-elle un sens ? Calculer I_1 .

2) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - [a + \sqrt{a^2 - 1} \cos \varphi]x}$$

pour $|x|$ assez petit.

.../...

3) On considère la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a + \sqrt{a^2 - 1} \cos \varphi)^n \, d\varphi \ .$$

Montrer qu'il existe un réel strictement positif ρ tel que, pour $|x| < \rho$ on ait :

$$\lim_{n \to \infty} \left| y_a(x) - \sum_{p=0}^{n} u_p x^p \right| = 0 \ .$$

Préciser une valeur convenable pour ρ .

4) En déduire l'écriture de $L_n(a)$ sous la forme d'une intégrale.

5) Exprimer $\frac{d}{da}\left(L_n(a)\right)$ en fonction de a, n, $L_n(a)$ et $L_{n-1}(a)$.

On pourra développer l'expression trouvée au III, 4^e avant de dériver, et utiliser, après les avoir prouvées, les égalités :

$$k \ C_n^k = n \ C_{n-1}^{k-1} \quad \text{et} \quad (n-k) C_n^k = n \ C_{n-1}^k \ .$$

– IV –

1) Expliquer pourquoi l'on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ L_{n-1}(a) = a \ L_n(a) + \frac{1 - a^2}{n} \frac{dL_n}{da}(a) \ . \qquad (4)$$

2) En déduire une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par la fonction L_n .

3) On note F_n l'application qui au réel θ associe $F_n(\theta) = L_n(\cos \theta)$ expliquer pourquoi il existe des réels a_k tels que :

$$F_n(\theta) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} a_k \cos(n - 2k) \, \theta \ . \qquad (5)$$

4) *a*) Montrer que F_n satisfait l'équation différentielle :

$$\sin \theta \cdot F_n''(\theta) + \cos \theta \cdot F_n'(\theta) + n(n+1) \sin \theta \cdot F_n(\theta) = 0 \ . \qquad (6)$$

b) En déduire une relation entre a_k et a_{k+1} .

c) Calculer $\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} a_k$. Que peut-on dire du signe de a_k ?

5) Montrer que :

$$\forall a \in [-1, 1], \ |L_n(a)| \leqslant 1 \ .$$